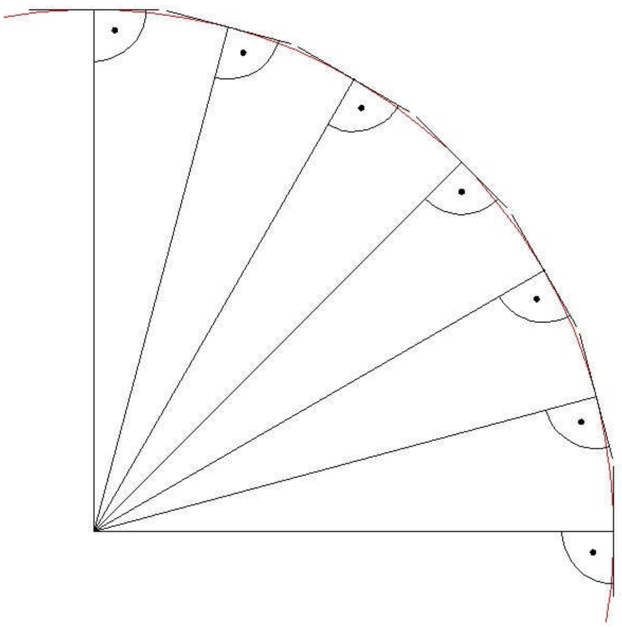
# Tangentiale Übergänge

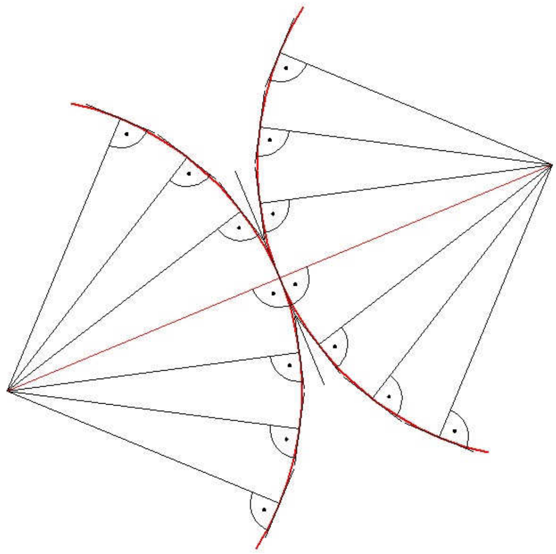
**Zuerst ein Fall aus der Praxis:**

Ein ehemaliger Kollege fertigte das hier abgebildete Set für verschiedene Kegelvereine an. Um die Startreihenfolge vor einem Spiel zu ermitteln, ziehen die Mitglieder je einen der 12 nummerierten Kegel heraus.
Die Kegel wurden aus Messing gedreht, graviert, poliert und verchromt.
Wie man sehen kann, haben die Kegel oben eine Kugelform, diese geht in einen Innenradius (Hals) über, der in einen Außenradius übergeht, dann kommt der zylindrische Teil (Bauch) und unten geht wieder ein Außenradius bis zur Standfläche.
Mein Kollege fertigte zuerst einmal einen Prototyp des ganzen Sets. Nach dem Drehen sahen die Messingkegel noch perfekt aus. Aber beim Polieren wurden die Übergänge des Innenradius in die Außenradien deutlich sichtbar und durch das anschließende Verchromen verstärkte sich dieser Effekt noch.
Was war passiert?
Die Positionen der Außenradien und deren Übergänge in den zylindrischen Teil waren leicht auszurechnen, jedoch der Innenradius für den Hals musste an die anderen Radien angelegt werden. Wir hatten damals noch kein CAD-Programm, mit dem man einfach einen Kreis tangential an andere Objekte anlegen kann und so hat dies mein Kollege durch Annäherung ausprobiert und kam immerhin bis auf 0,03 mm heran. Beim gedrehten Werkstück mit den Bearbeitungsriefen noch nicht sichtbar, aber beim polierten und verchromten Kegel sah die winzige Abweichung wirklich hässlich aus, weil die Übergänge nicht genau tangential verliefen. Auf die Bitte meines Kollegen rechnete ich ihm die Positionen mit dem Taschenrechner auf 0,001 mm genau aus und das Problem war behoben.

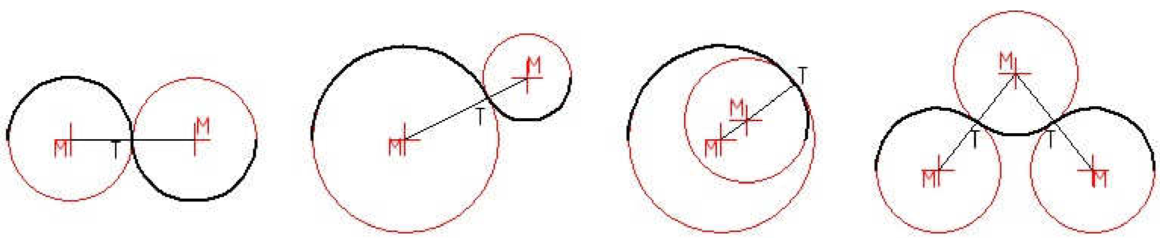
**Was ist eine Tangente oder tangential?**

Eine Tangente ist eine Gerade, die einen Kreis in einem Punkt berührt und nicht schneidet. Oder zwei Kreise berühren sich in einem Punkt, sie tangieren sich.
Ein tangentialer Übergang kann von einer Gerade zu einem Kreis führen oder von einem Kreis in einen anderen übergehen.
Wenn in technischen Zeichnungen ein Radius ohne weitere Angabe zu Position oder Schnittpunkt angegeben ist, dann müssen die Übergänge tangential ausgeführt werden.
Folglich wird man bei der CNC-Programmierung häufig mit tangentialen Übergängen konfrontiert und wie aus vorstehendem Beispiel ersichtlich, muss hier sehr exakt vorgegangen werden.

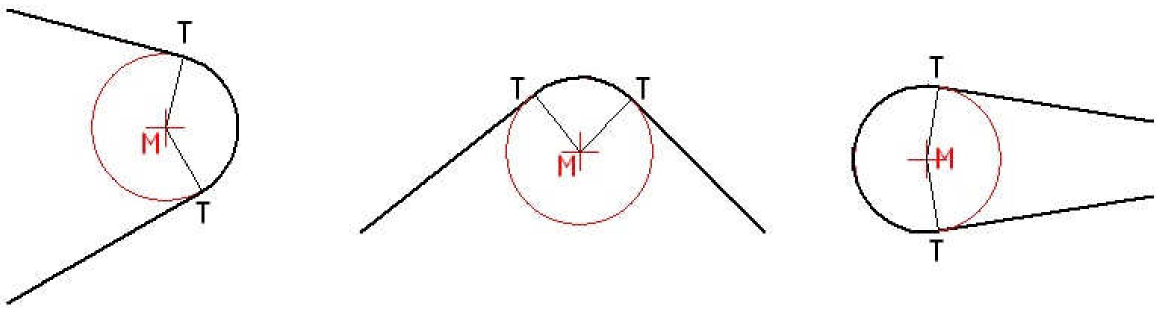




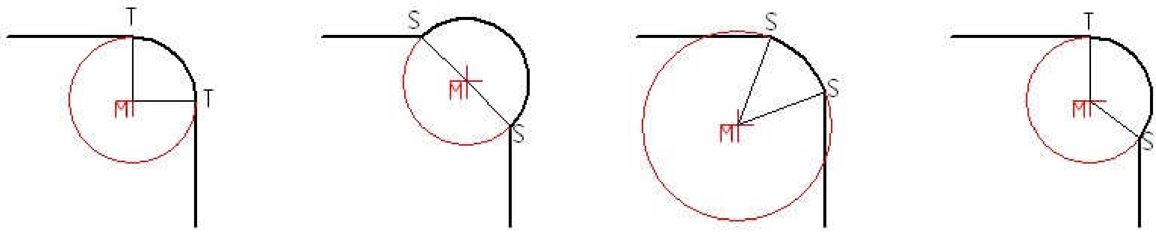
Zum besseren Verständnis sollte man sich einen Kreisbogen so vorstellen, dass er aus lauter unendlich kleinen Geraden zusammengesetzt ist, die jeweils senkrecht zum Mittelpunkt stehen (linkes Bild).
Auf dem rechten Bild tangieren sich zwei Kreisbögen. Was hierbei auffällt ist, dass der Berührungspunkt (Tangentenpunkt) und die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen gemeinsam auf einer Gerade liegen.




Tangentiale Übergänge Kreisbogen – Kreisbogen
Die Mittelpunkte M und der Berührungspunkt T liegen immer auf einer Geraden




Tangentiale Übergänge Gerade - Kreisbogen

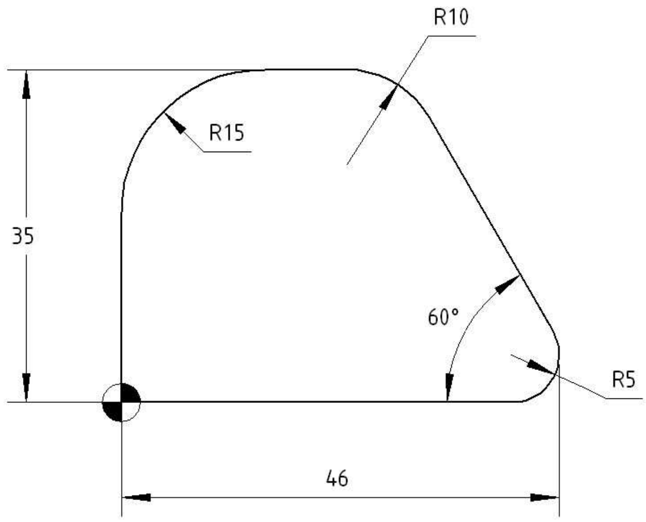



Tangentiale Übergänge Gerade – Kreisbogen bei den Tangentenpunkten T
Nichttangentiale Übergänge bei den Schnittpunkten S

**<u>Wieder zur Praxis zurück:</u>**

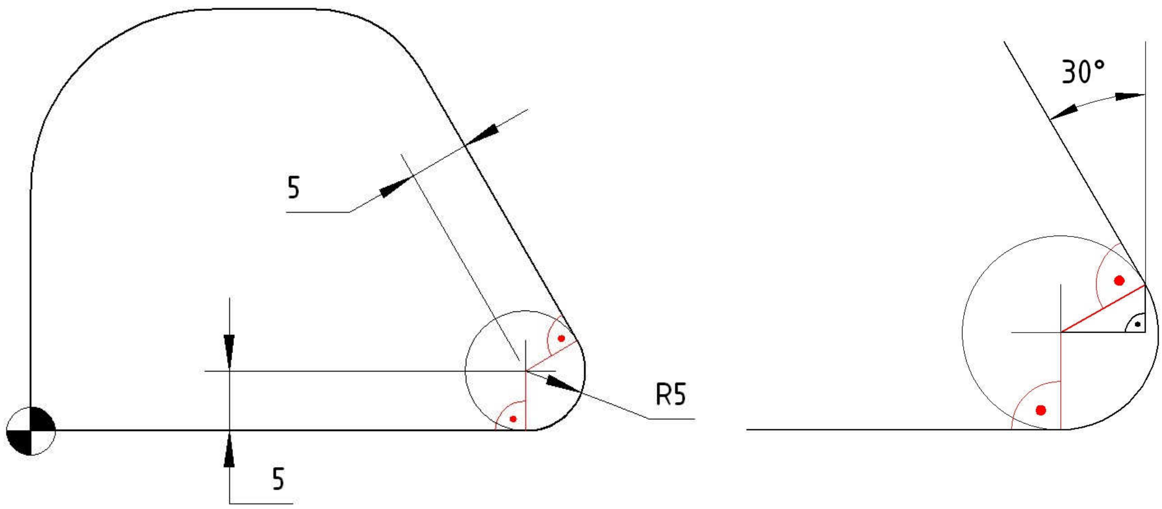
Gegeben sei eine Kontur, die im Gegenuhrzeigersinn vom Nullpunkt aus gefräst werden soll. Siehe dazu nächstes Bild.
Also: Gerade unten, Radius 5, Gerade 60º, Radius 10, Gerade oben, Radius 15, Gerade links wieder zum Nullpunkt.
In diesem Beispiel programmieren wir nur die Kontur und beachten hierbei keine Anfahrts- und Abfahrtswege, Zustellung in Z oder technologische Werte.

Die geometrischen Berechnungen sind mit einem CAD-Programm natürlich viel leichter zu bewerkstelligen. Dabei bitte darauf achten, dass Bögen und Geraden wirklich mit der Tangentenfunktion angelegt werden und nicht mit der Zoom-Funktion lediglich angenähert werden, das wird nie 100 %-ig genau. Bei den Berechnungen immer die höchstmögliche Auflösung der Maschinensteuerung, im allgemeinen 0,001mm berücksichtigen. Mathematisch korrekt auf die 3. Stelle nach dem Komma runden.
„Warum soll ich mir diese Mühe antun, wenn sogar mein billiges CAD-Programm oder die Konturzug-Funktion an meiner Maschine die Berechnungen schneller macht?“, werden Sie sich fragen. „Ich bin doch nicht blöd!“
O.K., mit den heutigen Hilfsmitteln geht das tatsächlich viel schneller und sicherer. Aber probieren Sie doch aus, ob Sie es noch können, es ist ein gutes Training.
Und wer z.B. die Zusammenhänge auf einem Blatt Papier seinen Kollegen erklären kann, erntet gewiss deren Anerkennung, was die erste Stufe zum Aufstieg ist.




**N0005 G1 X0 Y0**
Weil der tangentiale Übergang senkrecht zum Kreismittelpunkt erfolgt, ist der gesuchte Punkt X bei 46 – 5 = 41 und ist gleichzeitig der Anfangspunkt des Kreisbogens.
**N0010 X41**

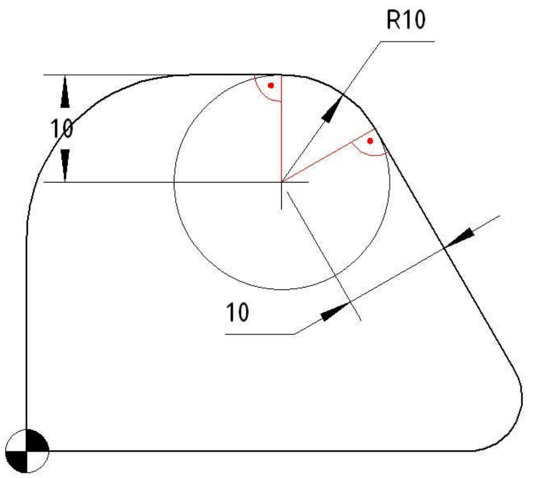
Jetzt kommt die erste Berechnung: Wir müssen den Übergangspunkt vom Radius 5 in die Gerade 60º finden, also den Endpunkt des Kreisbogens.

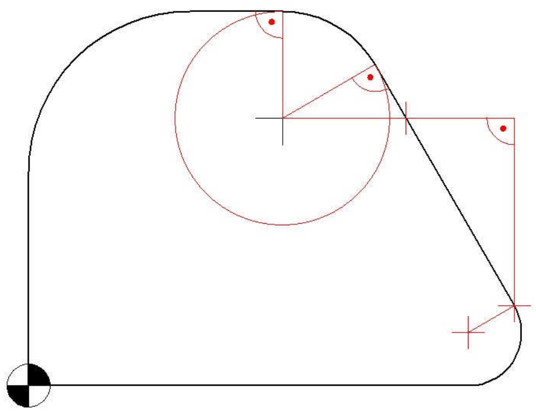



Wie wir wissen, sitzt der Endpunkt senkrecht zum Kreismittelpunkt und zwar mit dem Abstand 5 (Radius 5). Da wir hier aber mit kartesischen Koordinaten programmieren, müssen wir die X- und Y-Werte aus dem Radius 5 errechnen. Wenn man zwischen Mittelpunkt und Endpunkt ein rechtwinkliges Dreieck richtig hineinlegt, sieht man schon, was unvermeidlich folgen muss, denn jetzt kommen unsere vielgeliebten Winkelfunktionen zum Einsatz.
Die Hypotenuse (der rot eingezeichnete Radius) ist 5mm lang.
Rechts oben im Dreieck haben wir die 60º und folglich links 30º.
Wer es vergessen hat: die Winkelsumme im Dreieck ist immer 180º.
Es ist egal, ob hier mit dem Winkel 60º oder 30º gerechnet wird, nur muss die Ankathete und die Gegenkathete jeweils richtig zugeordnet werden.
Wenn wir hier mit dem Winkel 30º arbeiten, dann ist der X-Versatz die Ankathete und der Y-Versatz die Gegenkathete.

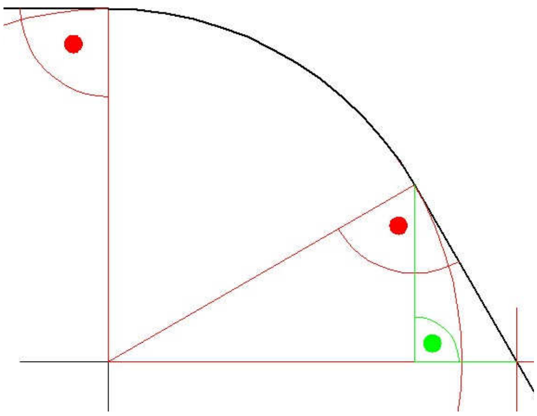
Somit: Ankathete = cos30º * Hypotenuse ==> X = 0,866 * 5 = 4,330
Gegenkathete = sin30º * Hypotenuse ==> Y = 0,5 * 5 = 2,5
Der Mittelpunkt, von dem aus wir gerechnet haben liegt bei X 41 und Y 5, das muss natürlich noch dazugerechnet werden.
Somit liegt der Endpunkt des Radius 5 auf X 45,33 und auf Y 7,5
**N0015 G3 X45,33 Y7,5 I0 J5**

Als nächstes benötigen wir den Endpunkt der Geraden 60º oben, der gleichzeitig der Anfangspunkt vom Radius 10 ist. Jetzt wird es noch mal schwieriger, denn der Konstrukteur hat die X-Position für den Radius 10 nicht eingezeichnet, er hätte es aus Gefälligkeit tun können, aber er muss es nicht.



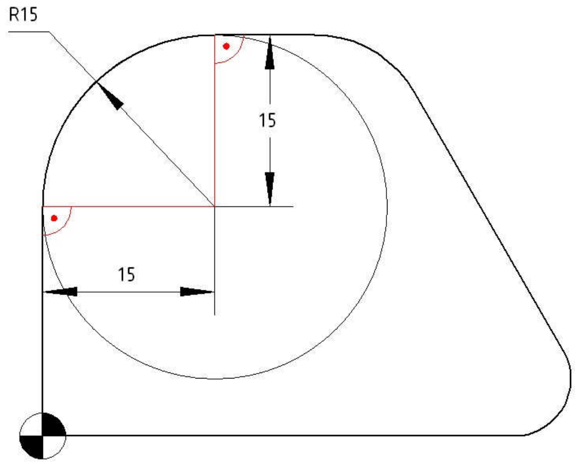



Was uns bisher bekannt ist, dass der Mittelpunkt des Radius 10 auf Y 25 liegt, der X-Wert ist jedoch zu ermitteln. Wir kennen auch den Anfangspunkt der Geraden, den wir gerade berechnet haben und kennen den Winkel der Geraden.
Jetzt heißt es wieder krampfhaft nach rechtwinkligen Dreiecken zu suchen, die uns weiterhelfen können.
Mit einem Dreieck (rechts) kann man immerhin einen Zwischenpunkt finden, der sich auf der gleichen Y-Höhe befindet, wie der Mittelpunkt des Radius 10.
Von dort aus kann der Mittelpunkt in X errechnet werden.
Und schlussendlich vom Mittelpunkt aus der Endpunkt der Geraden.
Vom ersten Dreieck sind eine Kathete (Y) und der Winkel bekannt. Gesucht ist die andere Kathete (X).
Die Ankathete (Y) = 35 – 10 – 7,5 = 17,5, der Winkel dazu = 30º
Somit: Gegenkathete = tan30º * Ankathete ==> X = 0,577 * 17,5 = 10,104
Der X-Hilfspunkt liegt also auf 45,33 – 10,104 = 35,226
Mit dem zweiten Dreieck können wir den Mittelpunkt bestimmen.
Wir kennen den Radius 10 und nehmen ihn als Ankathete, somit ist der Winkel 30º.
Wir suchen die Hypotenuse (Abstand vom Mittelpunkt zum Hilfspunkt in X)
Somit: Hypotenuse = Ankathete / cos30º ==> X-Versatz = 10 / 0,866 = 11,547
Der X- Mittelpunkt liegt auf 35,226 – 11,547 = 23,679
und der Y-Mittelpunkt liegt auf 25
Was uns immer noch fehlt, ist der Endpunkt der Geraden.
Dazu benötigen wir nochmals ein Dreieck (das kleine grüne innerhalb des 2. Dreiecks). Siehe nächstes Bild.



Wir kennen von vorher die Ankathete (R 10) des roten Dreiecks, benutzen sie jetzt als Hypotenuse um die längere Kathete (Y) des grünen Dreiecks auszurechnen.
Also: Gegenkathete = sin30º * Hypotenuse ==> Y = 0,5 * 10 = 5
Jetzt zur kürzeren Kathete (X) des grünen Dreiecks, wir nehmen die längere als Ankathete, somit ist der Winkel wieder 30º.
Folglich: Gegenkathete = tan30º * Ankathete ==> X = 0,577 * 5 = 2,887
Der X-Übergangspunkt liegt somit auf 35,226 – 2,887 = 32,339
Der Y-Übergangspunkt liegt auf 25 + 5 = 30
**N0020 G1 X32,339 Y30**
**N0025 G3 X23,679 Y35 I-8,66 J-5**

Da die Übergänge zum Radius 15 rechtwinklig zum Koordinatensystem liegen, ist der Rest wieder leicht zu programmieren.

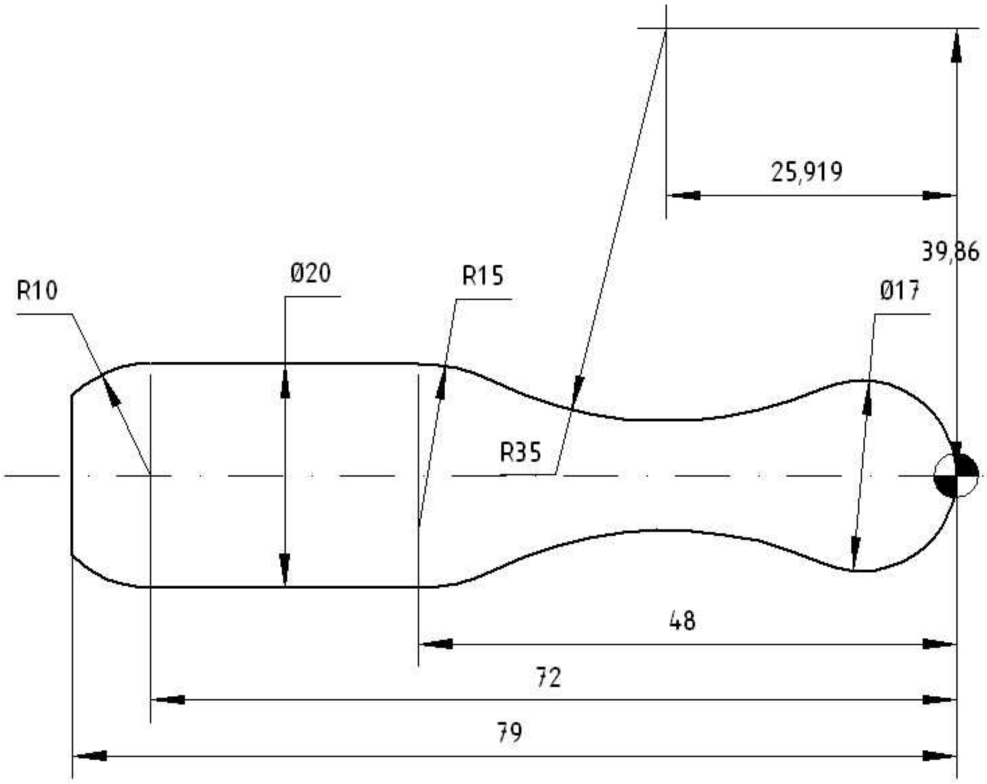



**N0030 G1 X15**
**N0035 G3 X0 Y20 I0 J-15**
**N0040 G1 Y0**

<u>Die fertige Kontur:</u>
**N0005 G1 X0 Y0**
**N0010 X41**
**N0015 G3 X45,33 Y7,5 I0 J5**
**N0020 G1 X32,339 Y30**
**N0025 G3 X23,679 Y35 I-8,66 J-5**
**N0030 G1 X15**
**N0035 G3 X0 Y20 I0 J-15**
**N0040 G1 Y0**

**Ein zweites Beispiel :**

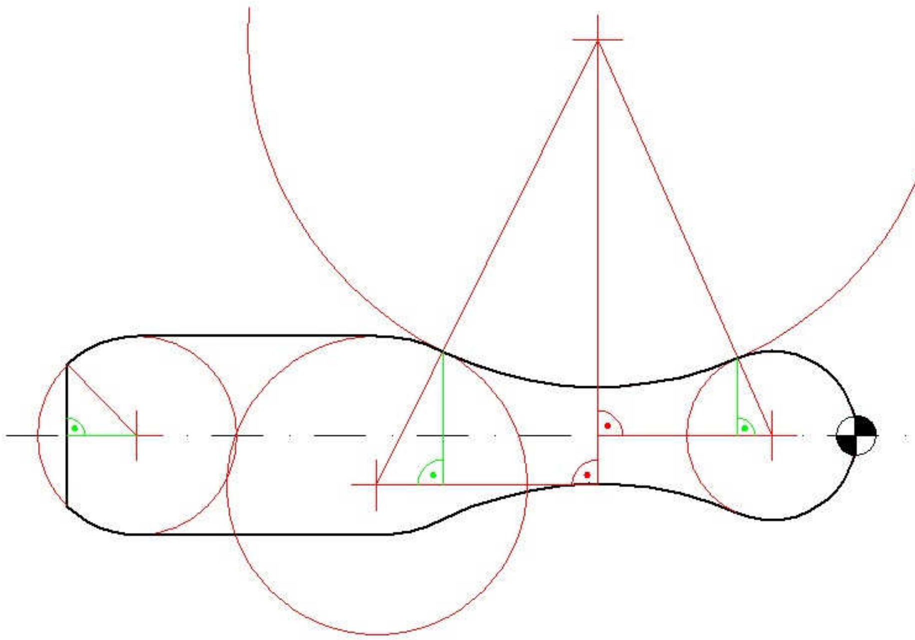
Um nicht aus der Übung zu kommen, haben wir einen Kreis, der tangential an zwei weitere angelegt ist. Der Konstrukteur hat den Mittelpunkt des Radius 35 in die Zeichnung eingetragen, entweder aus Mitleid mit uns, oder weil er uns nicht zutraut, dass wir den Punkt mit Hilfe der Analytischen Geometrie (Schnittpunkt zweier Geraden) ebenfalls herausfinden können.
Auf jeden Fall erspart er uns viel Zeit, aber er lässt uns dennoch genug zum Rechnen übrig, damit das Gehirn fit bleibt.




Für diesen kleinen Kegel soll die Fertigkontur vom Nullpunkt bis zum Ende des Radius 10 gedreht werden.
Hier programmieren wir ebenfalls nur die Kontur ohne Anfahrts- und Abfahrtswege oder technologische Werte.

Dieses eigentlich harmlos aussehende Werkstück hat es aber ganz schön in sich, wenn kein CAD oder eine Hilfe zur Konturzugprogrammierung vorhanden ist. Solche Berechnungen sollten aus Kostengründen möglichst nicht in der Werkstatt gemacht werden. Aber wer es trotzdem kann, ist seinen Kollegen immer eine Nasenlänge voraus.

Zuerst erstellen wir uns eine Skizze als Hilfestellung (siehe nächstes Bild), damit wir die Übersicht behalten. Dort zeichnen wir die Kreise und mögliche hilfreiche Dreiecke hinein.



Da wir den Mittelpunkt vorgegeben haben, sind die beiden roten rechtwinkligen Dreiecke schon definiert. Wir benötigen nur die Katheten der beiden grünen kleinen Dreiecke (rechts und Mitte), um die Tangentenpunkte zu finden.
Wir könnten jetzt mit Hilfe der Winkelfunktionen die Winkel der roten Dreiecke berechnen und mit den dann bekannten Winkeln die Katheten der grünen Dreiecke ermitteln, wie im vorigen Beispiel bei der Fräskontur.

Nicht um Sie zu ärgern, sondern der geistigen Fitness wegen, lösen wir dieses Problem diesmal mit Hilfe der Verhältnisrechnung.
Was ist denn das schon wieder?
Bei den rechtwinkligen Dreiecken ändern sich die Größen der Hypotenuse und der Katheten im selben Verhältnis, sofern die Winkel nicht verändert werden.
Übrigens: die Winkelfunktionen sind auch nichts anderes als Verhältnisse der Katheten und der Hypotenuse untereinander, abhängig vom Winkel.
Die Verhältnisse der Hypotenusen (Radien) sind hier 8,5 zu 43,5 = 0,1954 und 15 zu 50 = 0,3. Folglich müssen die Katheten im selben Verhältnis zueinander stehen.

Zum Übergang von R 8,5 nach R 35
Die kurze Kathete (Z) des roten Dreiecks vom Mittelpunkt des Radius 8,5 zum Mittelpunkt des Radius 35 ist 25,919 – 8,5 = 17,419mm lang. Multipliziert mit dem Faktor 0,1954 ergibt das eine Länge von 3,404mm für die kurze Kathete vom Mittelpunkt des Radius 8,5 zum Tangentenpunkt (grünes Dreieck). Dies ergibt einen Z-Wert von –11,904.
Die lange Kathete (X) des roten Dreiecks vom Mittelpunkt des Radius 8,5 zum Mittelpunkt des Radius 35 ist 39,86mm lang. Multipliziert mit dem Faktor 0,1954 ergibt das eine Länge von 7,789mm für die lange Kathete vom Mittelpunkt des Radius 8,5 zum Tangentenpunkt (grünes Dreieck). Wir benötigen dazu den doppelten X-Wert, also 15,578, weil beim Drehen durchmesserbezogen programmiert wird.
**N0005 G1 X0 Z0**
**N0010 G3 X15,578 Z-11,904 I0 K-8,5**

Nun zum Übergang von R 35 nach R15
Die kurze Kathete (Z) des roten Dreiecks vom Mittelpunkt des Radius 35 zum Mittelpunkt des Radius 15 ist 48 – 25,919 = 22,081mm lang. Multipliziert mit dem Faktor 0,3 ergibt das eine Länge von 6,623mm für die kurze Kathete vom Mittelpunkt des Radius 15 zum Tangentenpunkt (grünes Dreieck). Dies ergibt einen Z-Wert von -41,377.
Die lange Kathete (X) des roten Dreiecks vom Mittelpunkt des Radius 35 zum Mittelpunkt des Radius 15 ist 44,86mm lang. Multipliziert mit dem Faktor 0,3 ergibt das eine Länge von 13,458mm für die lange Kathete vom Mittelpunkt des Radius 15 zum Tangentenpunkt (grünes Dreieck). Abzüglich des Mittelpunktversatzes von 5mm ergibt dies 8,458 und somit einen X-Wert von 16,916, weil beim Drehen durchmesserbezogen programmiert wird.
**N0015 G2 X16,916 Z-41,377 I32,071 K-14,015**

Der nächste Bogen ist wieder leichter zu erreichen
**N0020 G3 X20 Z-48 I-13,458 K-6,623**
**N0025 G1 Z-72**

Der Endpunkt des letzten Bogens zur Standfläche macht uns wieder Probleme.
Wir haben keinen Winkel, aber den Radius und den Mittelpunkt.
Hier müssen wir den Satz des guten, alten Pythagoras anwenden, der damals sicherlich nicht beabsichtigte, dass sich Generationen von Schülern mit seiner genialen Entdeckung herumquälen und Heerscharen von Lehrern in den vorzeitigen Ruhestand entsorgt werden müssen.
Hier steht ganz unscheinbar: $a^2 + b^2 = c^2$ , ein kleiner Satz für einen Mathematiker, ein großer Satz für die Menschheit.
Zur Erinnerung: c ist die lange Seite des rechtwinkligen Dreiecks (Hypotenuse), a und b sind die kurzen Seiten, die den rechten Winkel bilden.
Wir haben die Seite c (Radius 10) und die Seite a (79 – 72 = 7) und suchen somit die Seite b (Endpunkt X).
Wir stellen um: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$X = \sqrt{10^2 - 7^2} \Rightarrow \sqrt{51} = 7{,}141$
Der einzugebende Wert ist wieder das doppelte, also ist X = 14,282
**N0030 G3 X14,282 Z-79 I-10 K0**

Die fertige Kontur:
**N0005 G1 X0 Z0**
**N0010 G3 X15,578 Z-11,904 I0 K-8,5**
**N0015 G2 X16,916 Z-41,377 I32,071 K-14,015**
**N0020 G3 X20 Z-48 I-13,458 K-6,623**
**N0025 G1 Z-72**
**N0030 G3 X14,282 Z-79 I-10 K0**

Geschafft!